## 基础课41 空间向量与空间角、距离问题

### 课时评价·提能

#### 基础巩固练

1. 在空间直角坐标系中，已知，，则点到直线的距离为（ C ）.

A. B. C. D.

[解析]，，，

,，

,,，

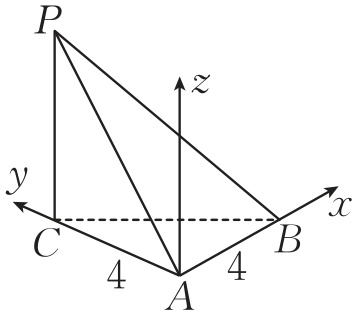
在 方向上的投影数量，

点 到直线 的距离.故选.

2. 已知在三棱锥中， 平面, ,, ，则点到平面的距离是（ A ）.

A. B. C. D.

[解析]以 为坐标原点，建立如图所示的空间直角坐标系，



则,,.

设平面 的一个法向量为，

则

即

令，则，

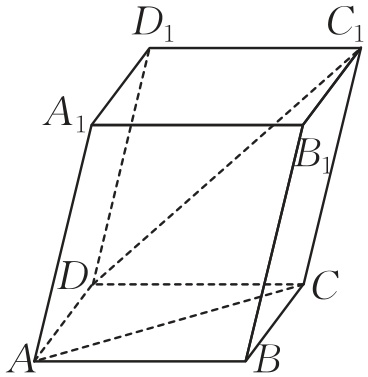
， 点 到平面 的距离为.

故选.

3. 已知在平行六面体中，底面是边长为2的正方形，， ，则异面直线与所成的角的余弦值为（ C ）.

A. B. C. D.

[解析]如图，在平行六面体 中， ， ，



，，

则，而，且，

于是，

所以,，

所以异面直线与所成的角的余弦值为.故选.

4. 设 , , 为平面，且 ,.若 与 所成的二面角为 ，与 所成的角为 ，则 与 所成的锐二面角为（ D ）.

A. B. C. D.

[解析]设平面 ， ， 的单位法向量分别为,,，直线 上的单位方向向量为.

根据题意，,,}构成空间直角坐标系的一个单位正交基，

由题意可设 与 的夹角的余弦值为，与 的夹角的余弦值为，

设,，则，同理可得，

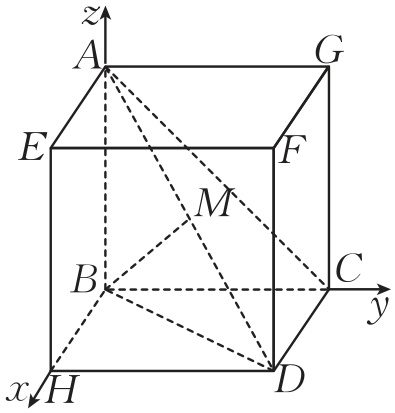
由，解得，

于是所求锐二面角为 .故选.

5. 在《九章算术》中，将四个面都是直角三角形的四面体称为鳖臑，在鳖臑中， 平面，，且，为的中点，则异面直线与夹角的余弦值为（ A ）.

A. B. C. D.

[解析]如图，正方体内的三棱锥 为满足题意的鳖臑，



以 为原点，建立如图所示的空间直角坐标系，设正方体的棱长为1，

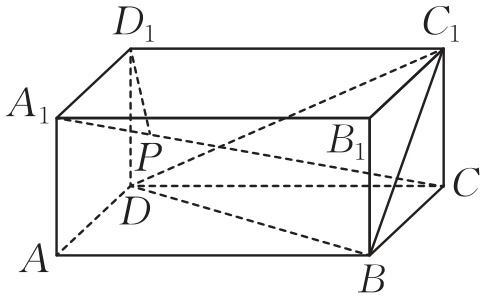
则，，，，,,，

则,,，，

,，

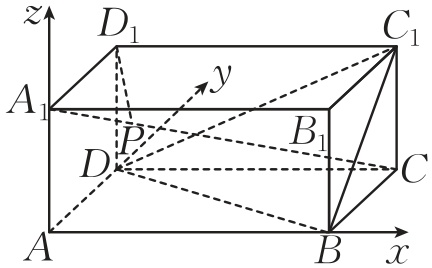
故异面直线 与 夹角的余弦值为.故选.

6. 如图，在长方体中，，，为线段上的动点，当时，直线与平面所成角的正弦值为（ C ）.



A. B. C. D.

[解析]如图,以 为坐标原点，,,所在直线分别为 轴、轴、轴建立空间直角坐标系.，，



则,,,,,，

设，则，.

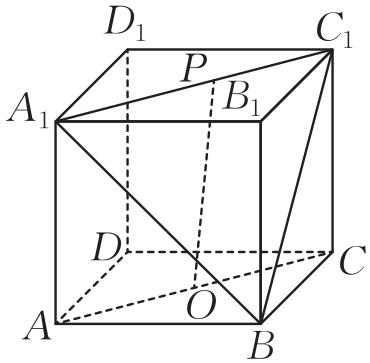
当 时，

所以,,，

所以,,，易知平面 的一个法向量为，

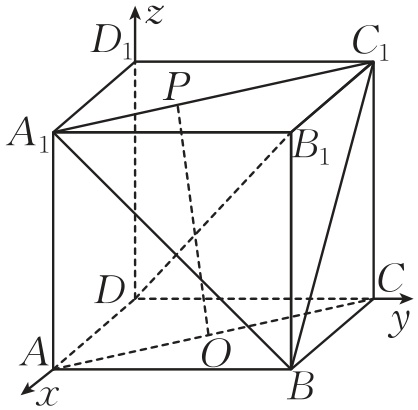
所以直线 与平面 所成角的正弦值为,，故选.

7. 如图，在正方体中，是的中点，点在线段上，若直线与平面所成的角为 ，则 的取值范围是（ C ）.



A. , B. , C. , D. ,

[解析]如图，设正方体的棱长为1，，则，



连接 并以 为原点，，，所在直线分别为,,轴建立如图所示的空间直角坐标系,

则,,,,，则,，又，所以，所以 ,,.

在正方体 中，体对角线 平面，

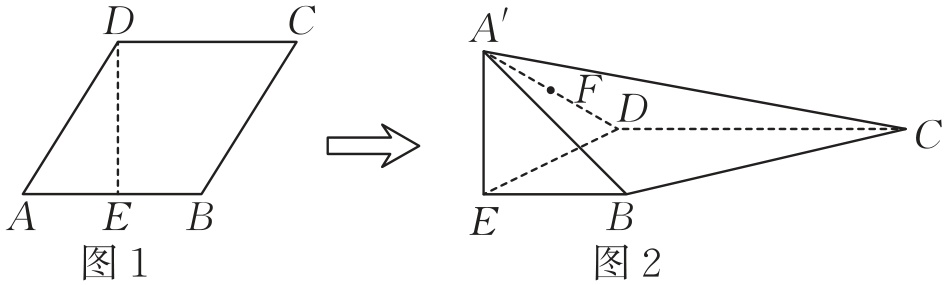
所以 是平面 的一个法向量，

所以,

，

所以当 时， 取得最大值，最大值为，当 或 时， 取得最小值，最小值为,所以,.故选.

8. 已知菱形的边长为4， ，为的中点（如图1），将沿直线翻折至处（如图2），连接，，若四棱锥的体积为，为的中点，则到直线的距离为（ A ）.



A. B. C. D.

[解析]连接（图略），因为四边形 为菱形，且 ，所以 为等边三角形，

因为 为 的中点，所以，所以,.

因为， 平面, 平面，所以 平面.

因为菱形 的边长为4，所以,,，

所以直角梯形 的面积为，

设四棱锥 的高为，则，得，

所以，所以 平面，

所以以 为原点，,,所在的直线分别为,,轴，建立空间直角坐标系（图略），则,,,,所以，

所以令,,,,

所以,，

所以点 到直线 的距离.

故选.

#### 综合提升练

9. （多选题）已知在棱长为1的正方体中，为侧面（不含边界）内的动点，为线段上的动点，若直线与的夹角为 ，则下列说法正确的是（ AC ）.

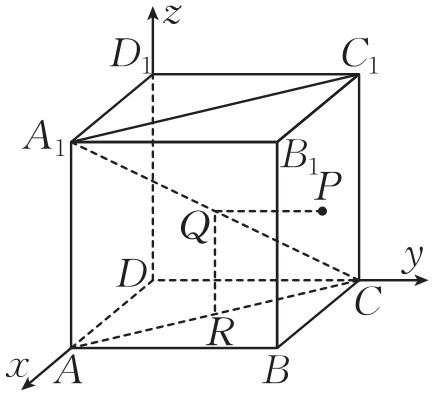
A. 线段的长度为

B. 的最小值为2

C. 对任意点，总存在点，使得

D. 存在点，使得直线与平面所成的角为

[解析]建立如图所示的空间直角坐标系，根据题意，可得，，，，，，，，



设点，，由直线 与 的夹角为 ，得，，

故，解得.

Q为线段 上的动点，则有，解得.

对于，有，故 正确；

对于，过点 作平面 的垂线，垂足为，

因为，所以，

故求 的最小值等价于求 的最小值，

因为 ，，

所以，

则，当且仅当 时，等号成立，结合，可得此时，故 错误；

对于，若，，，

则，又，

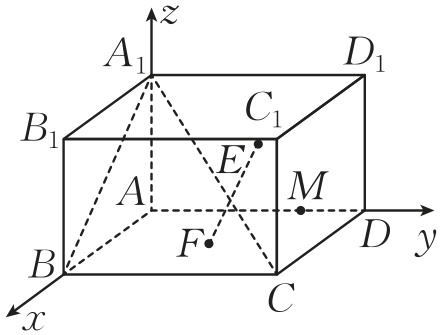
所以当 时，,此时点 与点 重合，当点 与点 重合时，,当 时，，则，

当 时，，故对任意点，总存在点 使得，故 正确；

对于，易知平面 的一个法向量为，若直线 与平面 所成的角为 ，

即直线 与平面 的法向量所成的角为 ，则,解得，矛盾，故 错误.故选.

10. （多选题）如图，在长方体中，,,是侧面的中心，是底面的中心，点在线段上运动.以为原点，,,所在直线分别为,,轴，建立空间直角坐标系，则（ ABD ）.



A. 是平面的一个法向量

B. 直线平面

C. 异面直线与垂直

D. 存在点，使得直线与平面所成的角为

[解析]由题意可得,,,，,,,.

因为 是侧面 的中心，是底面 的中心，所以,,,,,.

对于，因为,，，

所以，，

所以，，所以 是平面 的一个法向量，所以 正确；

对于，因为 平面，

所以 是平面 的一个法向量，

因为,0,，所以，所以，

因为 平面，所以直线 平面，所以 正确；

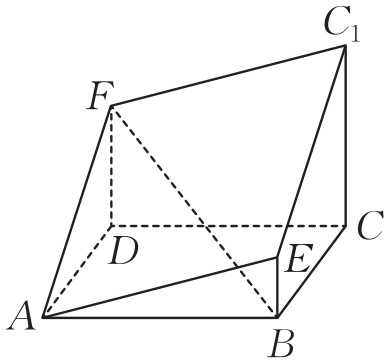
对于，因为,0,，所以 与 不垂直，所以异面直线 与 不垂直，所以 错误；

对于，设，则，由 可知 是平面 的一个法向量，设直线 与平面 所成的角为 ，则,，

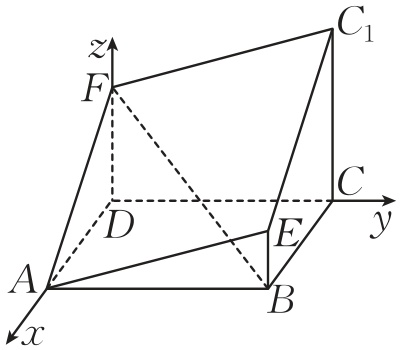
若直线 与平面 所成的角为，则，解得，

所以存在点，使得直线 与平面 所成的角为，所以 正确.故选.

11. （双空题）如图，这个多面体是由底面为的长方体被平行四边形所截得到的，其中，，，，则的长为  ，点到平面的距离为  .



[解析]如图，建立空间直角坐标系，则,,,,，设，



由题意可知，四边形 为平行四边形，则，即，则，即，

所以，所以，即 的长为.

设平面 的一个法向量为，

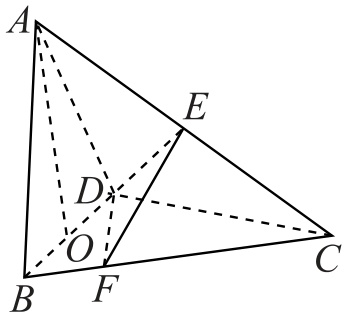
因为，，

所以

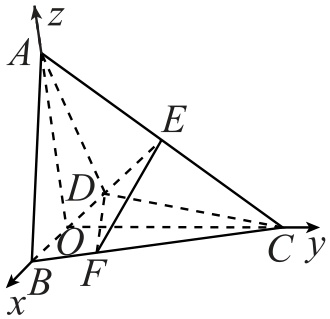
令，则，即，

因为，所以点 到平面 的距离.

12. [2024·江苏模拟]如图，在三棱锥中，已知,，为的中点， 平面，，为的中点.若点在上，满足，则二面角的正弦值是  .



[解析]如图，连接，



,，，

，，两两互相垂直，

以 为坐标原点，,,所在直线分别为,,轴建立空间直角坐标系，则,,,，为 的中点，，,

设平面 的一个法向量为,

,

令，解得,，，

设平面 的一个法向量为,

,,,

，

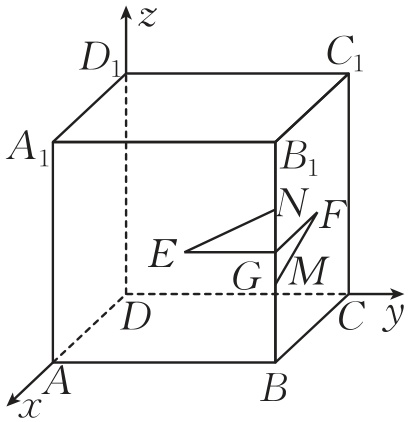
令，解得,，

，设二面角 的大小为 ,则，.

#### 应用情境练

13. 钟鼓楼是中国传统建筑之一，属于钟楼和鼓楼的合称，是主要用于报时的建筑.中国古代一般建于城市的中心地带，在现代城市中，也常常可以看见附有钟楼的建筑.某建筑物楼顶有一顶部逐级收拢的四面钟楼，四个大钟对称分布在四棱柱的四个侧面（四棱柱看成正四棱柱，钟面圆心在棱柱侧面中心上），在整点时刻（在0点至12点中取整数点，含0点，不含12点），已知在3点时和9点时，相邻两钟面上的时针所在的两条直线相互垂直，则正面在2点时和右侧面在8点时，两钟面上的时针所在的两条直线所成的角的余弦值为  .

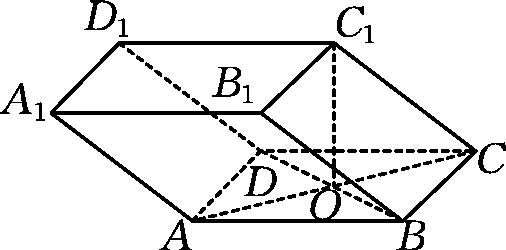
[解析]如图，在正四棱柱 中，,分别为侧面 和侧面 的中心，为 的中点，为2点钟时针，为8点钟时针，则 ， ，设正四棱柱的底面边长为，侧棱长为，以 为原点，以,,的方向分别为,,轴正方向建立空间直角坐标系，则,,，,,，,,，,,，,,，,0,，所以,，所以当正面在2点时和右侧面在8点时，相邻两钟钟面上的时针所在的两条直线所成的角的余弦值为.



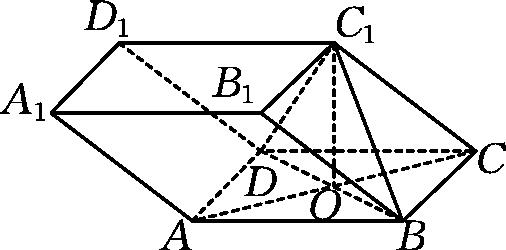
14*.*(2024·九省适应性测试)如图,在平行六面体*ABCD-A*1*B*1*C*1*D*1中,底面*ABCD*是边长为2的正方形,*O*为*AC*与*BD*的交点,*AA*1*=*2,∠*C*1*CB=*∠*C*1*CD*,∠*C*1*CO=*45°*.*

(1)证明:*C*1*O*⊥平面*ABCD.*

(2)求二面角*B-AA*1*-D*的正弦值*.*



[解析](1)如图,



连接*BC*1,*DC*1,

因为底面*ABCD*是边长为2的正方形,所以*BC=DC*,

又因为∠*C*1*CB=*∠*C*1*CD*,*CC*1*=CC*1,

所以△*C*1*CB*≌△*C*1*CD*,所以*BC*1*=DC*1,

因为*O*为线段*BD*的中点,所以*C*1*O*⊥*BD*,

在△*C*1*CO*中,*CC*1*=*2,*CO=AC=*,∠*C*1*CO=*45°,

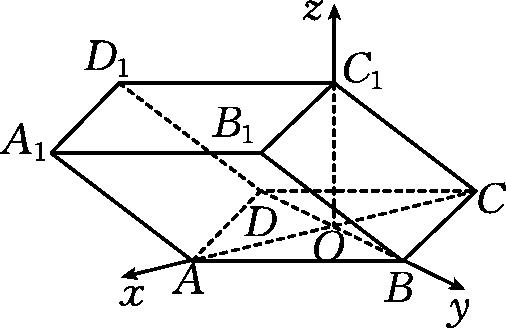
所以cos∠*C*1*CO==*,解得*C*1*O=*,

则*C*1*C*2*=OC*2*+C*1*O*2,即*C*1*O*⊥*OC*,

又*OC*∩*BD=O*,*OC*⊂平面*ABCD*,*BD*⊂平面*ABCD*,

所以*C*1*O*⊥平面*ABCD.*

(2)



建立如图所示的空间直角坐标系,

则*B*(0,,0),*D*(0,*-*,0),*A*(,0,0),*C*(*-*,0,0),*C*1(0,0,),

则*==*(,0,),*=*(*-*,,0),*=*(*-*,*-*,0),

设平面*BAA*1的一个法向量为*m=*(*x*1,*y*1,*z*1),平面*DAA*1的一个法向量为*n=*(*x*2,*y*2,*z*2),

则⇒⇒令*x*1*=*1,则*m=*(1,1,*-*1),

⇒⇒令*x*2*=*1,则*n=*(1,*-*1,*-*1),

设二面角*B-AA*1*-D*大小为*θ*,

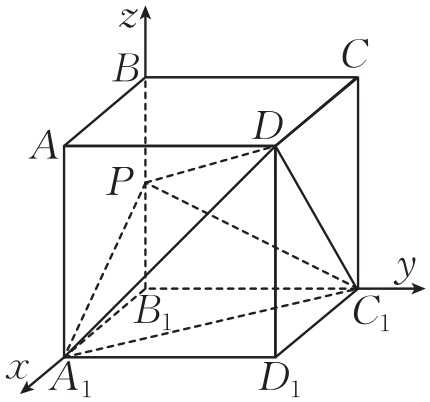
则cos *θ===*,得sin *θ==*,

所以二面角*B-AA*1*-D*的正弦值为*.*

#### 创新拓展练

15. 已知正方体的内切球的表面积为 ，是棱上一动点，当直线与平面的夹角最大时，四面体的体积为  .

[解析]以 为原点，,,所在直线分别为,,轴建立如图所示的空间直角坐标系，



正方体 的内切球的表面积为 ， 内切球半径， 正方体的棱长为1，

，，，

设，，

,，，

设平面 的一个法向量为，

则,

,取,

直线 与平面 的夹角的正弦值为,，

令，，，

，

令，,,，

,,，

当，即，即 时，直线 与平面 的夹角的正弦值取得最大值，此时直线 与平面 的夹角也最大，

当直线 与平面 的夹角最大时，为棱 的中点，

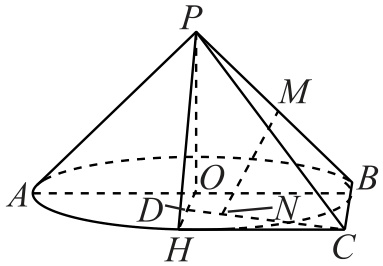
此时平面 的一个法向量为,,，又，

点 到平面 的距离为,，

此时，，则 的面积为，

此时四面体 的体积为.

16. [2024·青岛模拟]如图，为圆锥的顶点，为圆锥底面的圆心，圆锥的底面直径，母线，是的中点，四边形为正方形.



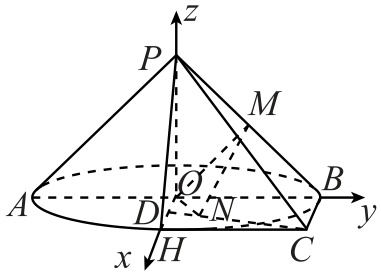
（1）设平面 平面，证明：.

（2）设为的中点，是线段上的一点，当与平面所成的角最大时，求的长.

[解析]（1） 四边形 为正方形，，

平面， 平面，平面.

平面，平面 平面，.



（2） 圆锥的母线长为，，，，

以 为原点，所在的直线为 轴，所在的直线为 轴，所在的直线为 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，

则，，，，

设，则，

，

又 为平面 的一个法向量，

设 与平面 所成的角为 ，

则，

令，则，

则

，

当，即 时， 最大，即 最大，此时,,，.